8.11.2018

Άσκηση | Βρείτε τον μκδ των 1453 και 1204 και γράψτε τον στην μορφή $d = k1453 + \lambda 1204$

$$1453 = 1 \cdot 1204 + 249$$
$$1204 = 4 \cdot 249 + 208$$
$$249 = 1 \cdot 208 + 41$$
$$208 = 5 \cdot 41 + 3$$
$$41 = 13 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (41 - 13 \cdot 3)$$
$$= 14 \cdot 3 - 41 = 14(208 - 5 \cdot 41) - 41$$
$$= 14 \cdot 208 - 71 \cdot 41 =$$
$$= 14 \cdot 208 - 71(249 - 208)$$
$$= 85 \cdot 208 - 71 \cdot 249$$
$$= 85(1204 - 4 \cdot 249) - 71 \cdot 249$$
$$= 85(1204 - 411 \cdot 249$$
$$= 85 \cdot 1204 - 411(1453 - 1204)$$
$$= \underbrace{\boxed{-411}}_{k} 1453 + \underbrace{\boxed{496}}_{\lambda} 1204$$

Είναι $k = -411$

$\lambda = 496$

Συνεπώς $d = -411 \cdot 1453 + 496 \cdot 1204$

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Ορισμός Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ μη-μηδενικοί ακέραιοι. Ο φυσικός αριθμός m λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, a_2, \dots, a_n$ αν και μόνο αν:

i) $a_1 / m, a_2 / m, \dots, a_n / m$

ii) Αν $a_1 / l, a_2 / l, \dots, a_n / l$ τότε $m \le l$

$m < l$

Το πιο μικρό κοινό πολλαπλάσιο

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$

$$\text{μκδ}(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdots \cdots p_s^{\min(a_s,b_s)} = d$$

$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$, $0 \le a_i$

$b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$, $0 \le b_i$

Απόδειξη

$d = p_1^{\min(a_1,b_1)} \dots\dots\dots p_s^{\min(a_s,b_s)} / a = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ Ισχυρίζομαι ότι ο d διαιρεί τον a.

$d = p_1^{\min(a_1,b_1)} \dots\dots p_s^{\min(a_s,b_s)} / b = p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$

d κοινός διαιρέτης

Έστω $\delta = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$ και έστω δ / a, δ / b

$\delta = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$, $\delta_1 \le a_1$ $\quad \delta_1 \le b_1$

$\delta_2 \le a_2$ $\quad \delta_2 \le b_2$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$\delta_s \le a_s$ $\quad \delta_s \le b_s$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 \le a_1, \delta_1 \le b_1 \Rightarrow \delta_1 \le \min(a_1,b_1) \\ \vdots \\ \delta_s \le a_s, \delta_s \le b_s \Rightarrow \delta_s \le \min(a_s,b_s) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s} / d = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdots \cdots p_s^{\min(a_s,b_s)}$$

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και $\left.\begin{array}{l} a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} \\ b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s} \end{array}\right\}$ $0 \le a_i$, $0 \le b_i$ δηλαδή δεν έχω απαραίτητα πρωτογενή ανάλυση.

Τότε μκδ$(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdots\cdots p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$

Εκπ$(\alpha,\beta) = [\alpha,\beta] = p_1^{\max[\alpha_1,\beta_1]} \cdots\cdots p_s^{\max[\alpha_s,\beta_s]}$

<u>Παράδειγμα</u> $\alpha = 100 = 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0$

$$\beta = 105 = \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 7}_{\text{πρωτογενής ανάλυση}} = \underbrace{2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1}_{\text{όχι πρωτογενής ανάλυση}}$$

μκδ$(\alpha,\beta) =$ μκδ$(100, 105) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0$

<u>Παράδειγμα</u> Βρείτε τον μκδ και το ΕΚΠ των

$$\begin{cases} \alpha = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^4 \cdot 17^3 \\ \beta = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^5 \end{cases}$$

Οι πιο μικροί εκθέτες στον μκδ και οι πιο μεγάλοι στο ΕΚΠ

$\alpha = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^4 \cdot 13^0 \cdot 17^3$

$\beta = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^0 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^5 \cdot 17^0$

μκδ$(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta) = 2^3 3^0 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2 \cdot 13^0 \cdot 17^0 = 2^3 \cdot 11^2$

ΕΚΠ$(\alpha,\beta) = [\alpha,\beta] = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^3 =$

$= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^3$

$\alpha\beta = (\alpha,\beta)[\alpha,\beta]$

$\alpha_1 + \beta_1 = \min(\alpha_1,\beta_1) + \max(\alpha_1,\beta_1)$

Αν $\alpha_1 < \beta_1$ τότε $\min(\alpha_1,\beta_1) = \alpha_1$ και $\max(\alpha_1,\beta_1) = \beta_1$

αν $\beta_1 < \alpha_1$ τότε $\min(\alpha_1,\beta_1) = \beta_1$ και $\max(\alpha_1,\beta_1) = \alpha_1$

$\alpha_1 = \beta_1$

Παράδειγμα Βρείτε το ΕΚΠ των $a=1453$ και $β=1204$

$[a,β] = 1204 \cdot 1453 = 1.749.412$

$1204 \cdot 1453 = (1204,1453)[1204,1453]$

$= 1[1204,1453] \Rightarrow [1204,1453] = 1204 \cdot 1453$

Ο τύπος ισχύει ΜΟΝΟ για δύο φυσικούς αριθμούς

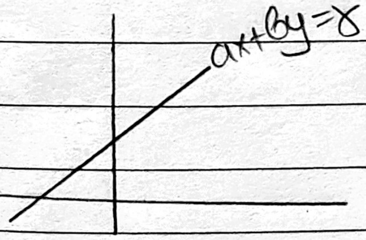
Διοφαντικές Γραμμικές Εξισώσεις!

γραμμική: 1ου βαθμού
Διοφαντική: οι συντελεστές είναι απαραίτητα ακέραιοι.
Οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν είναι και το x και το y να είναι ακέραιοι
Συντελεστές και λύσεις $\in \mathbb{Z}$

$ax+by=γ$

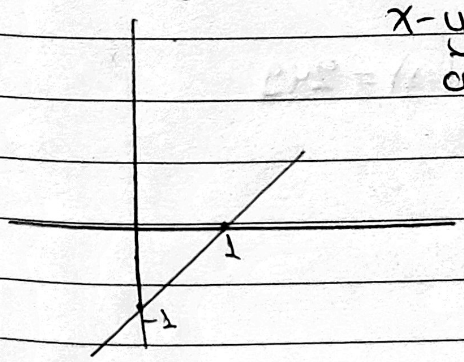
Ορισμός Το $(x_0,y_0) \in \mathbb{Z}^2$ ονομάζεται λύση της διοφαντικής εξίσωσης $ax+by=γ \iff ax_0+by_0=γ$

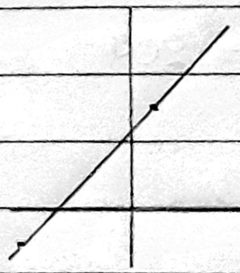
Γεωμετρία $ax+by=γ$ είναι μια ευθεία



Παράδειγμα

$x-y=1 \Rightarrow x=y+1$
άπειρες λύσεις αλλά με ενδιαφέρει να έχω και x και y ακέραιους





$(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$
Αν έχει μια ακέραια λύση, τότε υπάρχουν άπειρες τέτοιες λύσεις αλλά είναι διακριτές.

Παράδειγμα $1204x+2018y=1453$. Να αποδειχθεί ότι αυτή η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}^2$ (στο $\mathbb{R}^2$ έχει άπειρες)

Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ λύση. Τότε $1204x+2018y=1453$

$\left.\begin{array}{l}\text{έχω άρτιο} \times \text{άρτιο} = \text{άρτιο} \\ \text{και άρτιο} \times y = \text{άρτιο}\end{array}\right\}$ πολλαπλασιάζω δύο άρτιους και παίρνω περιττό, άτοπο!

Άρα, δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}^2$.

Θεώρημα Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $ax+\beta y=\gamma$ με $a,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ έχει λύση αν και μόνο αν $d=\text{μκδ}(a,\beta) \mid \gamma$

Αν (x_0,y_0) είναι μια λύση, τότε όλες οι λύσεις είναι

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\beta}{d}t \\ \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases}, \text{ όπου } t\in\mathbb{Z}$$

Παράδειγμα $1453x+1204y=249$

$\text{μκδ}(1453,1204)=1 \mid 249$ άρα έχει λύση.

Το $(1,-1)$ είναι λύση αφού $1453\cdot 1+1204(-1)=249$

$$x = x_0 + \frac{\beta}{d}t = 1 + \frac{1204}{1}t$$

$$, \; t\in\mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t = -1 - \frac{1453}{1}t$$

Απόδειξη $\boxed{\Rightarrow}$ Η $ax+by=\gamma$ έχει λύση $\Rightarrow \exists (x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$
θεωρήματος τέτοια ώστε $ax_0+by_0=\gamma$

$$d=(a,b) \Rightarrow \left.\begin{matrix} d/a \\ d/b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d/\boxed{x_0}a+\boxed{y_0}b=\gamma \Rightarrow d/\gamma$$

$\boxed{\Leftarrow}$ d/γ $\mu=\gamma$, $d=\mu\kappa\delta(a,b)$

$d=(a,b) \overset{\text{έχω}}{\Rightarrow} d=\kappa a+\lambda b$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$

$a\kappa+b\lambda=d$

$a\boxed{\kappa\mu}+b\boxed{\lambda\mu}=\mu d=\gamma$. Άρα $(\kappa\mu,\lambda\mu)\in\mathbb{Z}^2$ είναι λύση

Αν (x_0,y_0) λύση $\Rightarrow ax_0+by_0=\gamma$

$$a\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=ax_0+\cancel{\frac{ab}{d}t}+by_0-\cancel{\frac{ab}{d}t}=$$
$$=ax_0+by_0=\gamma$$

Άρα $\left(x_0+\frac{b}{d}t,\ y_0-\frac{a}{d}t\right)$ λύση.

Έστω (x_1,y_1) λύση της $ax+by=\gamma$

$$\left.\begin{cases} ax_1+by_1=\gamma \\ ax_0+by_0=\gamma \end{cases}\right\} (-) \begin{cases} a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a(x_1-x_0)=-b(y_1-y_0)$$
$$\Rightarrow \frac{a}{d}(x_1-x_0)=-\frac{b}{d}(y_1-y_0)$$

$$\left.\begin{matrix} b/d \Big/ a/d\,(x_1-x_0) \\ \mu\kappa\delta(b/d,\ a/d)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b/d \Big/ (x_1-x_0) \Rightarrow x_1-x_0=\frac{b}{d}t_1, \text{ για κάποιο } t_1\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x_1=x_0+\frac{b}{d}t_1$$

$$a/d\cdot b/d\, t_1=-\frac{b}{d}(y_1-y_0)=-(y_1-y_0)=\frac{a}{d}t_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1=y_0-\frac{a}{d}t_1$$